

1 10点

解答 ア

2 10点

解答

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{6} + \sqrt{13})^2 &= 6 + 2\sqrt{78} + 13 \\
 &= 19 + 2\sqrt{78} \\
 &= 19 + \sqrt{312}
 \end{aligned}$$

$\sqrt{289} < \sqrt{312} < \sqrt{324}$ より, $17 < \sqrt{312} < 18$ であるから,
 $36 < (\sqrt{6} + \sqrt{13})^2 < 37$ となる。

よって, $6 < \sqrt{6} + \sqrt{13} < \sqrt{37}$ であるから,

$\sqrt{6} + \sqrt{13}$ の整数部分は 6 となる。

小数部分 a は $a = \sqrt{6} + \sqrt{13} - 6$

よって, $a + 6 = \sqrt{6} + \sqrt{13}$

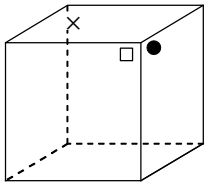
$$\begin{aligned}
 \text{したがって, } a^2 + 12a &= (a + 6)^2 - 36 \\
 &= (\sqrt{6} + \sqrt{13})^2 - 36 \\
 &= 19 + 2\sqrt{78} - 36 \\
 &= 2\sqrt{78} - 17
 \end{aligned}$$

3 20点

解答

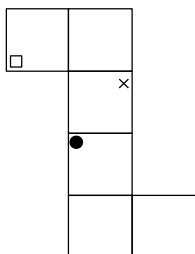
展開図A, Bより, 立方体は図1のようになる。

図1

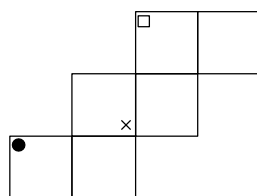


よって, 記号 □, × はそれぞれ次のようになる。

展開図A



展開図B



4 20点

解答

直線 BC と DE の交点を G とする。

$\triangle ADE$ と $\triangle BGE$ において,

平行線の錯角は等しいから,

$$\angle DAE = \angle GBE \quad \dots \textcircled{1}$$

対頂角であるから,

$$\angle AED = \angle BEG \quad \dots \textcircled{2}$$

点 E は辺 AB の中点より,

$$AE = BE \quad \dots \textcircled{3}$$

①, ②, ③ より, 1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから,

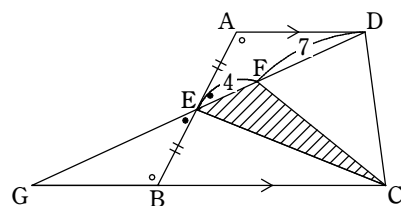
$$\triangle ADE \equiv \triangle BGE$$

よって, 台形 ABCD と $\triangle DGC$ の面積は等しい。

$\triangle DGC$ の面積を S とすると,

$$\begin{aligned}
 \triangle ECF &= \frac{4}{11+4+7} \triangle DGC \\
 &= \frac{4}{22} S \\
 &= \frac{2}{11} S
 \end{aligned}$$

したがって, $\frac{2}{11}$ 倍



5 20点

解答

(赤, 赤) の確率 $\frac{1}{5}$, (赤, 白) の確率 $\frac{2}{5}$, (赤, 黒) の確率 $\frac{1}{5}$,

(白, 白) の確率 $\frac{1}{15}$, (白, 黒) の確率 $\frac{2}{15}$ より,

最も出やすい色の組み合わせは (赤, 白)

最も出にくい色の組み合わせは (白, 白)

6 (1) 10点 (2) 10点

解答

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \begin{cases} x^2 - (a+2)x + 2a < 0 & \dots \textcircled{1} \\ 6x^2 + x - 1 > 0 & \dots \textcircled{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

とおく。

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow (x-2)(x-a) < 0$$

より, (i) $a > 2$ のとき, 不等式①の解は, $2 < x < a$

(ii) $a = 2$ のとき, 不等式①の解はない

(iii) $a < 2$ のとき, 不等式①の解は, $a < x < 2$

である。また,

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow (3x-1)(2x+1) > 0$$

より, 不等式②の解は,

$$x < -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3} < x$$

よって, 不等式①, ②を同時に満たす整数 x がちょうど 4 つ存在するのは,

$a > 2$ のとき, $6 < a \leq 7$

$a < 2$ のとき, $-4 \leq a < -3$

つまり, $-4 \leq a < -3, 6 < a \leq 7$

$$(2) \quad a = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}} \text{ とおく。}$$

$a^2 = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}$ より,

$$a^2 = 2 + a$$

$$a^2 - a - 2 = 0$$

$$(a+1)(a-2) = 0$$

$a > 0$ より, $a = 2$

$$\text{したがって, } \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}} = 2$$

7 (1) 10点 (2) 15点

解答

$$(1) \quad (2^{\frac{1}{2}})^6 = 2^3 = 8, \quad (3^{\frac{1}{3}})^6 = 3^2 = 9 \text{ より,}$$

$$(2^{\frac{1}{2}})^6 < (3^{\frac{1}{3}})^6 \text{ であるから, } 2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{3}} \quad \dots \textcircled{1}$$

また,

$$(2^{\frac{1}{2}})^{14} = 2^7 = 128, \quad (7^{\frac{1}{7}})^{14} = 7^2 = 49 \text{ より,}$$

$$(7^{\frac{1}{7}})^{14} < (2^{\frac{1}{2}})^{14} \text{ であるから, } 7^{\frac{1}{7}} < 2^{\frac{1}{2}} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } 7^{\frac{1}{7}} < 2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{3}}$$

$$(2) \quad (1) \text{ より, } 7^{\frac{1}{7}} < 2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{3}}$$

各辺の常用対数をとると, 底 10 は 1 より大きいから,

$$\log_{10} 7^{\frac{1}{7}} < \log_{10} 2^{\frac{1}{2}} < \log_{10} 3^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{つまり, } \frac{1}{7} \log_{10} 7 < \frac{1}{2} \log_{10} 2 < \frac{1}{3} \log_{10} 3 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\text{また, } 2^x = 3^y = 7^z \text{ より, } \log_{10} 2^x = \log_{10} 3^y = \log_{10} 7^z$$

$$\text{つまり, } x \log_{10} 2 = y \log_{10} 3 = z \log_{10} 7$$

$$x \log_{10} 2 = y \log_{10} 3 = z \log_{10} 7 = k \text{ とおくと, (} k \text{ は正の定数)}$$

x, y, z は正の実数で,

$$\log_{10} 2 = \frac{k}{x}, \quad \log_{10} 3 = \frac{k}{y}, \quad \log_{10} 7 = \frac{k}{z} \text{ であるから, } \textcircled{3} \text{ に代入して,}$$

$$\frac{k}{7z} < \frac{k}{2x} < \frac{k}{3y}$$

よって, $3y < 2x < 7z$

8 (1) 10点 (2) 15点

[解答]

(1) B (X_1, Y_1) とすると,

$$\text{直線 AB は } y=2x \text{ に垂直であるから, } \frac{a-Y_1}{a-X_1} = -\frac{1}{2} \dots \textcircled{1}$$

$$\text{線分 AB の中点は直線 } y=2x \text{ 上にあるから, } \frac{a+Y_1}{2} = 2 \cdot \frac{a+X_1}{2} \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } B\left(\frac{a}{5}, \frac{7}{5}a\right)$$

(2) 直線 $y=\frac{1}{2}x$ に関して点 A と対称な点を C (X_2, Y_2) とすると,

$$\text{直線 AC は } y=\frac{1}{2}x \text{ に垂直であるから, } \frac{a-Y_2}{a-X_2} = -2 \dots \textcircled{3}$$

$$\text{線分 AC の中点は直線 } y=\frac{1}{2}x \text{ 上にあるから, } \frac{a+Y_2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a+X_2}{2} \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ より, } C\left(\frac{7}{5}a, \frac{a}{5}\right)$$

2 点 A, B は直線 $y=2x$ に関して対称なので, $AP=BP$ 同様に, 2 点 A, C は直線 $y=\frac{1}{2}x$ に関して対称なので, $AQ=CQ$ よって, $\triangle APQ$ の周の長さは,

$$AP + PQ + QA = BP + PQ + QC \geq BC$$

 $BP + PQ + QC = BC$ となるのは, 点 P, Q が線分 BC 上にあるときで, このとき, $\triangle APQ$ の周の長さは最小となる。

直線 BC の方程式は,

$$y - \frac{7}{5}a = \frac{\frac{1}{5}a - \frac{7}{5}a}{\frac{7}{5}a - \frac{1}{5}a} \left(x - \frac{1}{5}a\right) \text{ より, } y = -x + \frac{8}{5}a$$

これと $y=2x$ の交点が P, $y=\frac{1}{2}x$ との交点が Q であるから,

$$P\left(\frac{8}{15}a, \frac{16}{15}a\right), Q\left(\frac{16}{15}a, \frac{8}{15}a\right)$$

|| 9 (1) 10点 (2) 15点

[解答]

(1) 条件より,

$$a_1=1, a_2=1$$

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \dots \textcircled{1}$$

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta (a_{n+1} - \alpha a_n) \quad (\alpha, \beta \text{ は実数})$$

が成り立つとすると,

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -1$$

 α, β を解にもつ 2 次方程式は,

$$x^2 - x - 1 = 0 \text{ であり, } x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

よって, $\textcircled{1}$ は以下のように変形できる。

$$a_{n+2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}a_{n+1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(a_{n+1} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}a_n\right) \dots \textcircled{2}$$

$$a_{n+2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}a_{n+1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(a_{n+1} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}a_n\right) \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \text{ より, 数列 } \left\{a_{n+1} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}a_n\right\} \text{ は,}$$

$$\begin{aligned} \text{初項 } a_2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}a_1 &= 1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

公比 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ の等比数列である。

$$\text{よって, } a_{n+1} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \dots \textcircled{4}$$

$$\text{同様に } \textcircled{3} \text{ より, } a_{n+1} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}a_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \dots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4} - \textcircled{5} \text{ より, } \sqrt{5}a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$\text{したがって, } a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right\}$$

$$(2) (1) \text{ より, } \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \alpha, \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \beta \text{ とおくと,}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n), a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) \text{ より,}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})}{\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)}$$

$$= \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha^n - \beta^n}$$

$$= \frac{\alpha - \beta \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}$$

$$\alpha > \beta \text{ より } \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1 \text{ であり, } n \rightarrow \infty \text{ のとき } \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \rightarrow 0 \text{ であるから,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

10 (1) 10点 (2) 15点

[解答]

$$(1) y = 3(e^x - e^{-x}) \text{ とおく。}$$

両辺に e^x をかけて変形すると,

$$3(e^x)^2 - ye^x - 3 = 0$$

$$e^x > 0 \text{ より, } e^x = \frac{y + \sqrt{y^2 + 36}}{6}$$

$$\text{よって, } x = \log \frac{y + \sqrt{y^2 + 36}}{6}$$

$$\text{したがって, } g^{-1}(x) = \log \frac{x + \sqrt{x^2 + 36}}{6}$$

$$(2) x = g(t) \text{ とおくと,}$$

$$\begin{aligned} \{g(t)\}^2 + 36 &= 9(e^t - e^{-t})^2 + 36 \\ &= 9(e^{2t} + e^{-2t}) + 18 \\ &= \{f(t)\}^2 \end{aligned}$$

また, $x = 3(e^t - e^{-t})$ より,

$$\frac{dx}{dt} = 3(e^t + e^{-t}) = f(t)$$

$$x = g(t) \text{ より, } t = g^{-1}(x)$$

$$= \log \frac{x + \sqrt{x^2 + 36}}{6} \text{ である。}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 36}} = \int \frac{f(t)}{\sqrt{\{g(t)\}^2 + 36}} dt$$

$$= \int \frac{f(t)}{f(t)} dt$$

$$= t + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$= \log \frac{x + \sqrt{x^2 + 36}}{6} + C \text{ であるから,}$$

$$\begin{aligned} \int_0^6 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 36}} &= \left[\log \frac{x + \sqrt{x^2 + 36}}{6} \right]_0^6 \\ &= \log(1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$